B - 1°: La fonction t a $tg_n(t)$ est continue sur R donc elle admet au moins une primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ce qui prouve que I_n existe

2°/ Posons $\begin{cases} u'(t)=\cos t \\ v(t)=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=\sin t \\ v'(t)=1 \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = \left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + \left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t dt$ faisons une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u'(t)=\sin t \\ v(t)=t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t)=-\cos t \\ v'(t)=2t \end{cases}$

d'où $I_1 = \left[-t^2\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt \Rightarrow I_1 = \pi - 2$

3°/ Soit $n \in \mathbf{N}$; $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+3}\sin t dt$

Posons $\begin{cases} u'(t)=\sin t \\ v(t)=t^{n+3} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t)=-\cos t \\ v'(t)=(n+3)t^{n+2} \end{cases}$

d'où $I_{n+2} = \left[-t^{n+3}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\cos t dt$

$$= (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\cos t dt$$

Posons $\begin{cases} u'(t)=\cos t \\ v(t)=t^{n+2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t)=\sin t \\ v'(t)=(n+2)t^{n+1} \end{cases}$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\cos t dt = \left[t^{n+2}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\sin t dt$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)I_n$. Il en résulte que :

$I_{n+2} = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+3)I_n$ d'où